САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГОРБУНОВА Екатерина Андреевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ ПРИ АНТРОПОГЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Колпак Евгений Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Александров Александр Юрьевич, Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления

кандидат физико-математических наук, профессор Смольников Борис Александрович, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича

Защита состоится “27” ноября 2013 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д-212.232.50 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33-35, факультет географии и геоэкологии, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, В.О., Университетская наб., дом 7/9. Автореферат размещен на сайте www.spbu.ru.

Автореферат разослан “__”_____________2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор

Г.И. Курбатова

Общая характеристика работы

1. Актуальность темы. Изучение последствий антропогенного загрязнения природной среды и связанного с ним техногенного накопления тяжелых металлов в настоящее время приобрело исключительно важное значение. Существует обширная литература, посвященная исследованию задач популяционной биологии. Однако в предлагаемых математических моделях практически не учитывается антропогенное воздействие на популяции, а если и учитывается, то на локальном промежутке времени. При этом в целом не учитываются стратегии выживания популяций, уменьшение емкости среды и влияния антропогенного давления на отдельные особи.

2. Целью работы является разработка и исследование математических моделей, учитывающих различные факторы, влияющие на численность популяции: плотность, подвижность, трофические ресурсы и т.д.

3. Методы исследования. Используются теоретические методы исследования взаимодействующих популяций с применением аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Применяются современные компьютерные технологии решения математических задач с сопоставлением полученных теоретических результатов с экспериментальными данными.

4. Достоверность работы. Достоверность результатов обеспечивается строгой постановкой задач и применяемым математическим аппаратом. Полученные решения согласуются с аналитическими и численными решениями других авторов: Murray, Ризниченко, Базыкин, Петровский, Тютюнов, Mickens, McLeod, Kozlova. Теоретические результаты согласуются с экспериментальными данными, опубликованными в литературных источниках.

5. Положения, выносимые на защиту

1. Компартментальные (многокамерные) модели динамики численности взаимодействующих популяций.

2. Математическая модель динамики численности взаимодействующих популяций при антропогенном воздействии.

3. Аналитические и численные решения эволюционных уравнений в моделях динамики численности взаимодействующих популяций.

4. Математическая модель трофотаксиса.

5. Алгоритмы решения нелинейных эволюционных уравнений.

6. Научная новизна. В отличие от ранее предложенных математических моделей популяционной биологии, опубликованных в литературных источниках, в диссертации разработана математическая модель техногенного воздействия на биологические популяции в течение длительного промежутка времени с учетом различных стратегий выживаемости. Построены аналитические решения стационарных уравнений для модели динамики численности одиночной популяции на отрезке; разработаны алгоритмы решения нелинейных эволюционных уравнений в частных производных, и такие решения построены для различных трофических функций.

7. Практическая значимость. Результаты могут быть использованы для прогноза состояния экологических систем, для оценки рисков и последствий антропогенного воздействия.

8. Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийской научной конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде *MATLAB*» г. Санкт-Петербург, 2007 и г. Астрахань, 2009 г., на ежегодной Международной конференции «Процессы управления и устойчивость» г. Санкт-Петербург, в 2008, 2009 и 2013 г.г., на ежегодной Международной междисциплинарной научной конференции «Синергетика в естественных науках: Курдюмовские чтения» г. Тверь, Твер. гос. ун-т, в 2009 и 2010 г.г., на Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование.» г. Пущино, в 2009 и 2013 г.г. и в г. Дубна в 2010 г., на Международная научно-практическая конференция «Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика» г. Архангельск, 2010 г., на втором молодежном экологическом Конгрессе "Северная Пальмира" г. Санкт-Петербург, 2010 г., на II международной научной конференции «The modeling of nonlinear processes and systems» г. Москва, Moscow State University of Technology “STANKIN”, 2011 г., на V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» г. Воронеж, 2012г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в одиннадцати работах, приведенных в конце автореферата. Статья [4] опубликована в журнале, рекомендуемом ВАК. В работах [2, 4, 8, 9, 10, 11], опубликованных в соавторстве с Е.П. Колпаком, соавтор сформулировал задачи и предложил методы их решения, а также обсуждал промежуточные результаты.

9. Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации 140 стр., общее количество рисунков и графиков - 81, 3 таблицы, библиография содержит 202 наименования. Объем приложения составляет 10 стр., включая 13 рисунков.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность и сформулированы цели работы, перечислены выносимые на защиту научные результаты диссертации и дан обзор литературы по теме диссертации. Отмечено, что значительный вклад в исследования в этой области был внесен

Murray, Ризниченко, Базыкиным, Петровским, Тютюновым, Mickens, McLeod, Kozlova и др.

В первой главе рассмотрены задачи для одиночной популяции и популяций, взаимодействующих по принципу хищник-жертва с различными трофическими функциями:

Ферхюльст: $f(u) = u(1-u)$, (1.1)

Свирижев: $f(u) = u^2(1-u)$, (1.2)

Олли: $f(u) = u(u-\beta)(1-u) \quad (0 < \beta < 1)$, (1.3)

для многокамерных ареалов. В математическом плане – это задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Проанализированы стационарные состояния.

Одиночная популяция. Для двухкамерной модели взаимодействия двух групп одной и той же популяции

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1) - v_1 u_1 + a v_2 u_2, \\
\frac{du_2}{dt} &= f_2(u_2) + \frac{1}{a} v_1 u_1 - v_2 u_2,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где v_1 и v_2 - удельные скорости перехода из первого ареала во второй и из второго в первый, $a = K_2 / K_1$ - отношение емкостей ареалов, доказаны теоремы об устойчивости нетривиальных стационарных точек и неустойчивости тривиальных. Для случая функции Олли (1.3) доказана теорема о неединственности нетривиальных решений системы уравнений (1.4) при малых значениях скоростей переходов между камерами.

Для многокамерной модели рассмотрены два ареала: линейный и кольцевой и доказаны теоремы, связывающие устойчивость и неустойчивость стационарных точек в зависимости от устойчивости стационарных точек в однокамерной модели. Для трехкамерной модели Олли доказана теорема о существовании наряду с гомогенным решением гетерогенного.

Хищник-жертва. Теоретические результаты модели Вольтерра сравнивались с экспериментальными данными и дана оценка значений констант, входящих в уравнения.

Для модели Базыкина

$$\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = u^2(1-u) - uv, \\
\dfrac{dv}{dt} = -\gamma v(\alpha - u),
\end{cases} \tag{1.5}$$

где u, v - численность жертвы и хищника соответственно, γ и α - константы, найдены стационарные точки и доказана теорема:

Теорама 1.1. *Для любых* $\alpha \in (0,1)$ *система уравнений (1.5) имеет устойчивую стационарную точку* $(u^*, v^*) = (\alpha,\ \alpha(1-\alpha))$*, если* $\alpha > 1/2$.

Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(u-\beta)(1-u) - uv, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma v(\alpha - u) \end{cases} \qquad (0 < \beta < 1, \quad 0 < \alpha < 1) \qquad (1.6)$$

найдены все стационарные точки, исследована их устойчивость и доказана теорема:

Теорема 1.2. *Система (1.6) имеет 4 стационарные точки. Устойчивыми являются тривиальная стационарная точка и точка* $u = \alpha$, $v = (\alpha - \beta)(1-\alpha)$ *при выполнении условия:* $\dfrac{\beta+1}{2} < \alpha$.

Двухкамерная модель хищник-жертва имеет вид:

$$\frac{du_1}{d\tau} = (1-v_1)u_1 - \upsilon_{12}^u u_1 + \upsilon_{21}^u u_2,$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = \gamma\left[(1-v_2)u_2 + \upsilon_{12}^u u_1 - \upsilon_{21}^u u_2\right],$$

$$\frac{dv_1}{d\tau} = (-\mu_1 + u_1)v_1 - \upsilon_{12}^v v_1 + \upsilon_{21}^v v_2,$$

$$\frac{dv_2}{d\tau} = \gamma\left[(-\mu_2 + u_2)v_2 + \upsilon_{12}^v v_1 - \upsilon_{21}^v v_2\right].$$

Найдены стационарные точки и проанализирована их устойчивость.

Многокамерная модель для случая кольцевого ареала имеет следующий вид:

$$\text{для } i=1: \quad \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F_1(u_1, v_1) + V_1(u_n - 2u_1 + u_2), \\ \frac{dv_1}{dt} &= F_2(u_1, v_1) + V_2(v_n - 2v_1 + v_2); \end{aligned}$$

$$\text{для } i=2,\dots,n-1: \quad \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= F_1(u_i, v_i) + V_1(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \\ \frac{dv_i}{dt} &= F_2(u_i, v_i) + V_2(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}); \end{aligned} \qquad (1.7)$$

$$\text{для } i=n: \quad \begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= F_1(u_n, v_n) + V_1(u_{n-1} - 2u_n + u_1), \\ \frac{dv_n}{dt} &= F_2(u_n, v_n) + V_2(v_{n-1} - 2v_n + v_1). \end{aligned}$$

Здесь скорость миграции между камерами V_1 и V_2 для жертвы и хищника считалась одинаковыми для всех камер и постоянными во времени. F_1 и F_2 - трофические функции одинаковые во всех камерах.

Система (1.7) имеет гомогенные решения. Для случая модели Базыкина (1.5) поставлены численные эксперименты, выявившие наличие гетерогенных решений (рис. 1, за начальные условия брались $u_i = \alpha + 0.1\cos\pi i / n, v_i = \alpha(1-\alpha), i = 1, 2, ..., n$).

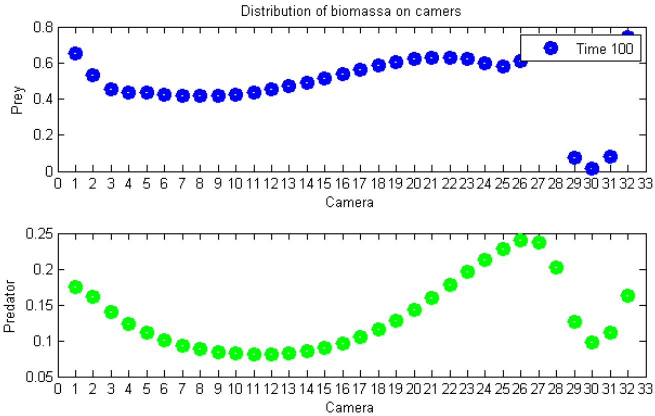

Рис. 1. Распределение численности хищника и жертвы по камерам

Во второй главе рассмотрены модели типа реакция-диффузия.

Одиночная популяция. Ставится задача для одиночной популяции на отрезке

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \tag{2.1}$$

где x - декартова координата, u - линейная плотность популяции, а функция $f(u)$ соответствует локальной скорости изменения численности популяции. Параметр D характеризует подвижность особей.

В качестве граничных условий рассматривались четыре варианта:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \;\; (2.2), \qquad u\big|_{x=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \;\; (2.3),$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \;\; u\big|_{x=l} = 0 \;\; (2.4), \qquad u\big|_{x=0} = 1, \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \;\; (2.5)$$

Начальные условия: $u(t=0)=u_0$.

Общая численность популяции находится по формуле: $M = \int\limits_0^l u\,dx$.

Решение стационарных уравнений представлено в квадратурах

$$\frac{D}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \Phi(u_*)-\Phi(u), \qquad \Phi(u)=\int\limits_0^u f(u)du .$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Существуют такие* D_0^{Sv} *и* D_0^F, *что при* $D > D_0^{Sv}$ *и при* $D > D_0^F$ *нелинейное стационарное уравнение (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), для случая функций Свирижева (1.2) и Ферхюльста (1.1) имеет только тривиальное решение.*

Теорема 2.2. *Нелинейное стационарное уравнение (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2), для случая функций Свирижева (1.2) и Ферхюльста (1.1) имеет только гомогенные решения на промежутке* $u \in [0,l]$.

Теорема 2.3. *Для случая функции Олли (1.3) существуют такие значения* $\beta \in (0,1/2)$ *и* $l<\infty$, *при которых нелинейное стационарное уравнение (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2), имеет гомогенные и гетерогенные решения.*

Предложены и реализованы два метода численного решения нелинейных краевых задач для уравнения (2.1). Все численные результаты представлены в безразмерном виде.

1. В методе Бубнова решение, удовлетворяющее граничным условиям $u\big|_{x=0}=\omega(t),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$, ищется в виде ряда по тригонометрическим функциям

$$u(t,x)=\omega(t)+\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\sin(k-1/2)\pi x .$$

Коэффициенты u_k должны удовлетворять системе ОДУ:

$$\frac{du_k}{dt}=\frac{-\omega'(t)}{(k-1/2)\pi}-\lambda_k^2 Du_k+2\int\limits_0^1 f(u)\sin\lambda_k x\,dx$$
$$\left(k=1,\dots,n;\ \lambda_k=(k-1/2)\pi\right).$$

Начальные значения функции $u_k(t)$ находятся из равенства

$$u_0(x)-\omega(0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(0)\sin(k-1/2)\pi x .$$

2. Метод сеток. Аппроксимация уравнения (2.1) осуществляется конечными разностями на равномерной сетке с шагом $h = 1/n$ по пространственной переменной и шагом τ по временной переменной:

$$z_i(t) - z_i(t-\tau) = \frac{D\tau}{h^2}\left(z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}\right) + \tau f(z_i(t)) \quad \left(i = 2,\dots,n\right)$$

$$z_1 = \omega(t),\ z_{n+1} - z_n = 0,\ \ z_i(t=0) = z_{0i}\,.$$

Эта система уравнений является нелинейной. В случае линейной системы она решается методом прогонки. В случае нелинейной системы эти уравнения записываются в виде:

$$L(z_i) + \tau f(z_i) = 0\,.$$

Для всех трех функций (1.1)-(1.3) для одиночной популяции на рис. 2 отражено изменение общей численности популяции во времени, решение построено методом сеток.

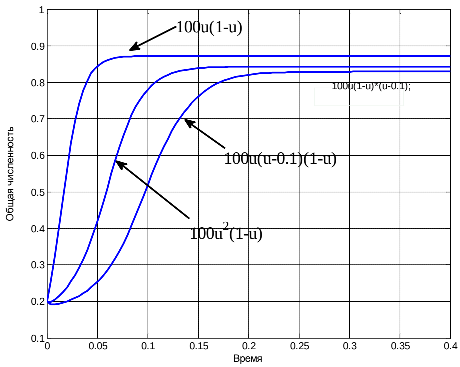

Рис. 2. Изменение общей численности популяции во времени на отрезке единичной длины

Рассмотрена задача о существовании решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\beta \frac{\partial u}{\partial x}\right) - bu\frac{\partial u}{\partial x} + f(u)\,,$$

в котором учитывается нелинейная подвижность и нелинейный дрейф особей в виде популяционной волны: $u = u(x + vt)$. Использован подход, изложенный в работе Колмогорова. Задача сводилась к поиску решения ОДУ:

$$D\frac{d}{dz}\left(u^\alpha \frac{du}{dz}\right) - V\frac{du}{dz} + f(u) - bu\frac{du}{dz} = 0 \qquad (2.6)$$

с граничными условиями $u(-\infty) = 0, \quad u(+\infty) = 1$.

В результате анализа доказана следующая теорема:

Теорема 2.5. (о существовании решения «бегущая волна») *Решение типа «бегущая волна» уравнения (2.6) для обобщенной логистической популяции может существовать, если* a *и* b/D *- положительные.*

Численные решения для логистической популяции (1.1) при граничных условиях (2.5) и начальном условии $u(0,x)=0$ строились с применением метода сеток. Проанализирована скорость движения популяционной волны для различных функций (рис. 3.) и нелинейность коэффициента подвижности (рис. 4).

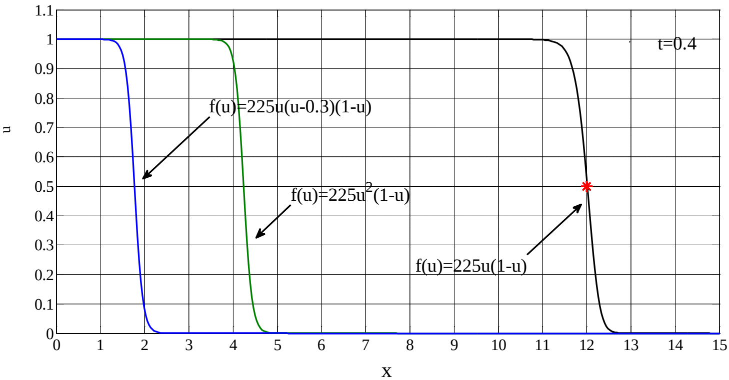

Рис. 3.

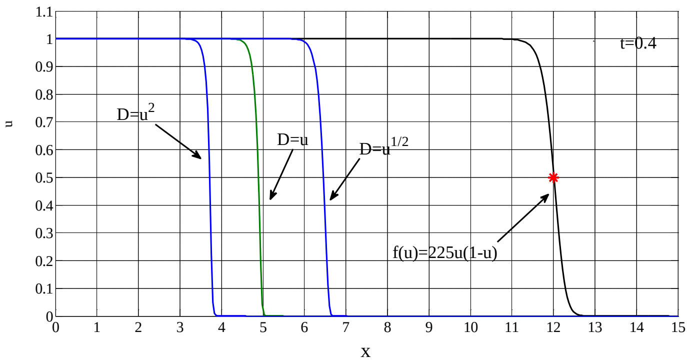

Рис. 4.

На основе численных и аналитических результатов, полученных в работе, и экспериментальных данных, опубликованных в литературных источниках, предложены варианты оценки удельной скорости роста популяции и коэффициентов подвижности.

Хищник-жертва. Для случая системы хищник-жертва модель с распределенными параметрами представлена следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_2(u,v). \end{cases} \tag{2.7}$$

Рассмотрены варианты граничных условий:

$$u|_{x=0} = 0,\ v|_{x=0} = 0\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0\ ;$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l}\ ,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x=0)} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}\ ,\quad v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l}\ ,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x=0)} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}\ .$$

Для модели Базыкина и модели Олли проведено исследование устойчивости. Определены соотношения коэффициентов подвижности, при которых возможна потеря устойчивости.

$$D_1 < \frac{(1-2\alpha)^2}{4(1-\alpha)} D_2 < \frac{1}{4} D_2 \ \text{(Базыкин)};\ D_1 < \frac{\alpha\left(2\alpha - 3(1+\beta)\right)^2}{4\gamma(\alpha-\beta)(1-\alpha)} D_2 \ \text{(Олли)}.$$

Для случая модели Базыкина с применением метода Бубнова построено решение для кольцевого ареала. На рис. 5 показано изменение численности хищника и жертвы на территории. В качественном отношении полученные результаты для многокамерной модели и диффузионной согласуются между собой, а также с результатом полученным Базыкиным.

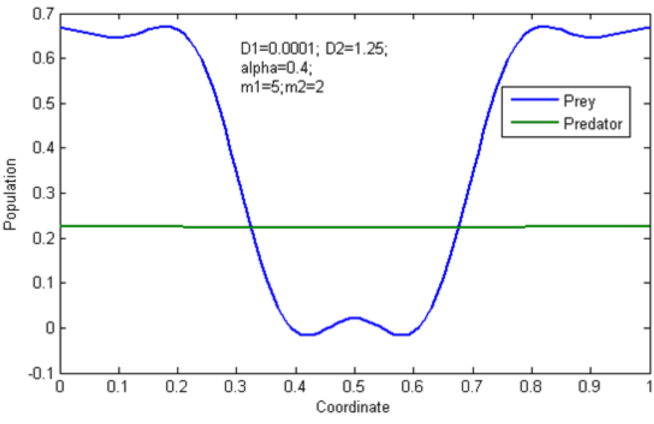

Рис. 5. Распределение популяции хищника и жертвы на территории.

Проверка работы алгоритмов осуществлялась на разных сетках по пространственной и временной переменной. Полученные результаты согласуются с аналогичными результатами, опубликованными в литературных источниках (Базыкин А.Д., Petrovskii S., McLeod P., Kozlova I. и др.).

Алгоритм построения численного решения был применен для решения следующих задач:

Модель одновременного заселения свободной территории хищником и жертвой.

Начальные условия: $u_1(0,x)=0$, $u_2(0,x)=0$.

Граничные условия: при $x=0$: $u_1=\alpha$, $u_2=\dfrac{1}{\alpha_1}f(\alpha_1)$

$$\text{при } x=l: \frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \ \frac{\partial u_2}{\partial x}=0$$

В качестве функций $f(u)$ рассматривались $f(u)=u(1-u)$, $f(u)=u^2(1-u)$, $f(u)=u$.

Результат решения задачи для случая функции Свирижева (1.2) при $D_1=0.001$, $D_2=0.001$ и $\alpha=0.6$ приведен на рис. 6, а при $\alpha=0.4$ на рис. 7. Аналогичный результат получен для логистической популяции (1.1).

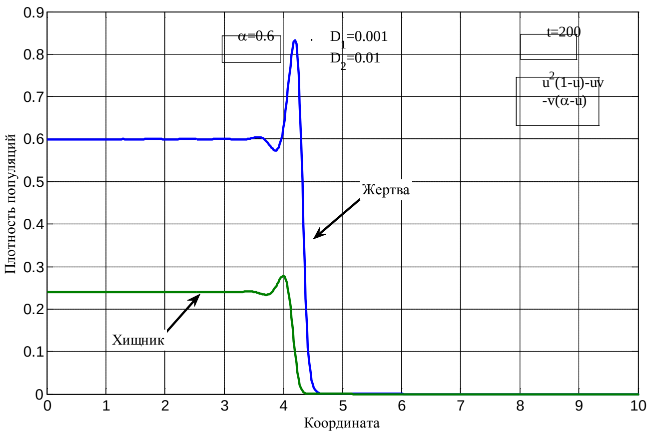

Рис. 6. Изменение численности популяций вдоль координаты

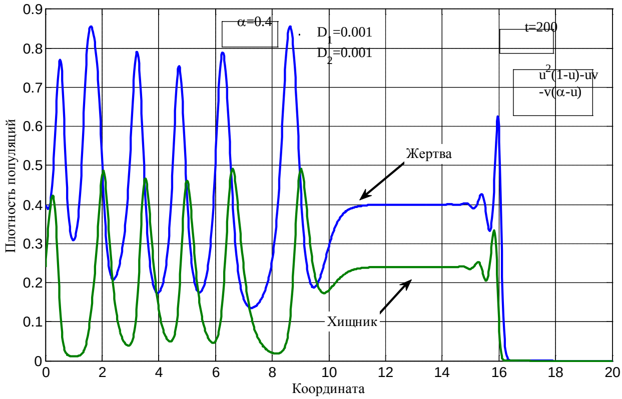

Рис. 7. Изменение численности популяций вдоль координаты

В отличие от точечной модели в диффузионной вдоль пространственной переменной возникают колебания.

Модель вселения хищника на территорию, занятую жертвой. Начальные условия $u_1(0,x)=1$, $u_2(0,x)=0$

В качестве функций $f(u)$ рассматривались (1.1) и (1.2).

На рис. 8 представлено распределение жертвы и хищника на отрезке в момент времени $t=200$ при $D_1=0.001$, $D_2=0.001$, $\alpha=0.6$ для $f(u)=u^2(1-u)$

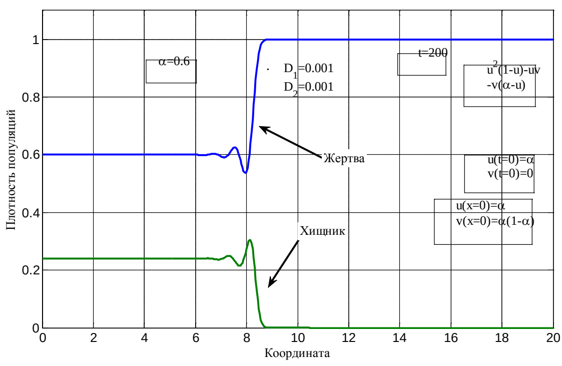

Рис. 8. Изменение численности популяций вдоль координаты

Модель хищник-жертва при наличии у жертвы убежищ, в которых она недоступна для хищника, принимает вид:

вне убежищ
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f(u_1) - u_1 u_2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \gamma u_2 (\alpha - u_1),$$

в зоне убежищ
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1^2 (1 - u_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \gamma u_2 \alpha.$$

Разработана модель трофотаксиса, в которой предполагается, что движение хищника происходит по градиенту концентрации жертвы, а жертвы по градиенту концентрации хищника:
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2) - \beta_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2) - \beta_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right),$$
где $f_2(u_1, u_2) = -\gamma u_2 (\alpha - u_1)$, а в качестве функции $f_1(u_1, u_2)$ рассматривались: $f_1(u_1, u_2) = u_1 - u_1 u_2$, $f_1(u_1, u_2) = u_1(1 - u_1) - u_1 u_2$, $f_1(u_1, u_2) = u_1^2 (1 - u_1) - u_1 u_2$, β_1 и β_2 - коэффициенты, характеризующие скорость перемещения особей популяции по градиенту плотности. Использовался метод Бубнова. В статическом случае решения представлялись в виде:
$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \sin\left(i\pi + \pi/2 \right) x, \quad u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t) \sin\left(i\pi + \pi/2 \right) x.$$
Для случая одного члена ряда разложения получены коэффициенты разложения.

В третьей главе рассмотрена модель динамики численности популяций при антропогенном воздействии, которая разрабатывалась на основе анализа экспериментальных данных и для случая точечной модели представлена системой
$$\frac{du}{dt} = \mu u \left(u - \alpha \frac{R}{B_1 + R} \right) \left(\frac{1 + AR}{1 + BR} - \frac{u}{q} \right) - \frac{bu^2}{a + u^2},$$
$$\frac{dR}{dt} = f(R).$$
В этой модели учитывается антропогенное воздействие на популяцию в целом - $bu^2 / a^2 + u^2$, стратегии выживания отдельных организмов - $(1 + AR)/(1 + BR) - u/q$ и невозможность популяции выжить при высоком токсичном воздействии - $u - \alpha R/(B_1 + R)$, где α, A, B, B_1, q -

константы, R - концентрация загрязнителей, влияющих на биологическую популяцию.

Построены численные решения для следующих задач: влияние точечного источника выделения токсинов на популяцию, влияние точечного антропогенного воздействия на популяцию, как для линейного отрезка, так и для многокамерных моделей.

В качестве примера (рис. 9) приведены численные результаты для 32 камер (многокамерная модель), когда в пяти центральных камерах есть антропогенное воздействие. При этом $\alpha = 0.6$, в начальный момент времени $u_i = \alpha, v_i = \alpha(1-\alpha)$, $f_1(u,v) = u(1\text{-}u) - uv,\quad f_2(u,v) = -\gamma v(\alpha - u)$ там, где нет антропогенного воздействия, и $f_1(u,v) = u(1\text{-}u) - uv - 0.44u^2/(1+u^2)$, $f_2(u,v) = -\gamma v(\alpha - u)$ там где действует антропогенный фактор.

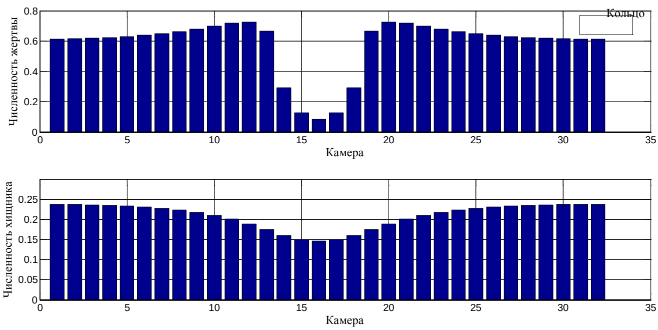

Рис. 9. Распределение хищника и жертвы по камерам (кольцо)

Публикации автора по теме диссертации

1. Горбунова Е.А. «Одиночная популяция на отрезке» // Труды V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». Воронеж, 2012. 20 с.

2. Горбунова Е.А., Крицкая А.В., Колпак Е.П. «Одиночная популяция на загрязненной территории» // Труды V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». Воронеж, 2012. 21 с.

3. Горбунова Е.А. Модель хищник-жертва с учетом таксиса // Математика. Компьютер. Образование. Анализ сложных биологических систем. Школа конференция: Сборник научных тезисов. Пущино, 2013. Вып. 20. С. 95-96.

4. Горбунова Е.А., Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции // Вестник СПбГУ. Сер.10: прикладная

математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 4. С. 18-30.

5. Захарьева Е.А. Модель хищник-жертва на неоднородном ареале // Проектирование научных и инженерных приложений в среде MatLab: Сборник научных тезисов. Астрахань, 2009. 644 с.

6. Захарьева Е.А. Модель хищник-жертва на плоскости // Математика. Компьютер. Образование: Сборник научных тезисов. Дубна, 2010. Вып. 17. 118 с.

7. Захарьева Е.А. Компьютерное моделирование системы хищник-жертва // Труды Международной научно-практической конференции «Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика». Архангельск, 2010, 35 с.

8. Захарьева Е.А., Колпак Е.П. Модель хищник-жертва на неоднородном ареале // Синергетика в естественных науках: Пятые Юбилейные Курдюмовские чтения: Материалы Международной междисциплинарной научной конференции. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. Ч.1. С. 130-131.

9. Захарьева Е.А., Колпак Е.П. Модель хищник-жертва на кольцевом ареале // Математика. Компьютер. Образование.: Сборник научных тезисов. Пущино, 2009. Вып. 16. Ч. 1. 253 с.

10. Захарьева Е.А., Колпак Е.П. Камерная модель для системы хищник-жертва // Синергетика в естественных науках: Шестые Курдюмовские чтения: Материалы Международной междисциплинарной научной конференции. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. Ч. 1. С. 43-46.

11. Gorbunova E.A., Kolpak E.P. Model predator-prey on the plane // Second International Scientific Symposium «The modeling of nonlinear processes and systems». Moscow State University of Technology “STANKIN”, 2011. 54 p.